

Concepto de señales y procesos

Mario Estévez Báez¹

José M. Estévez Carrera²

Andrés Machado García³

Material publicado originalmente en formato html en:

InfoWiki contributors. librosabiertos:conceptos_acerca_de_senales_y_procesos. InfoWiki. November 3, 2007, 01:40 GMT. Available at:

http://infomed20.sld.cu/wiki/doku.php?id=librosabiertos:conceptos_acerca_de_senales_y_procesos&rev=1194054007.

Accessed November 3, 2007.

Introducción

En el diccionario general de la Lengua Española VOX (Bibliograf S.A. Copyright, 1997) se recogen 15 acepciones para el sustantivo femenino *señal*. De ellas, tienen importancia para la física las siguientes: “*onda eléctrica para transmitir información a un circuito electrónico*”; “*onda de salida: la emitida por un elemento bajo el efecto de una o varias señales de entrada*”; “*alteración que se introduce o aparece en el valor de una magnitud cualquiera y que sirve para transmitir información*”; “*señal analógica: la formada por una cantidad de una magnitud cuyo valor numérico no se utiliza, aunque se conozca*”.

Como puede verse, el sustantivo información está íntimamente ligado al de señal. Revisando en el mismo diccionario puede encontrarse una acepción como: “*señal transmitida entre la entrada y la salida de un sistema*”.

V.I. Dmitriev (1991) plantea, que cabe utilizar como definición práctica de información la siguiente: “*información incluye todos los datos que son objeto de almacenamiento, transmisión y transformación*”. Esto ubica a la terminología empleada, como perteneciente al campo de las comunicaciones, al de la informática y al de la cibernética, entre otros. Obviamente, en Biología-Medicina, la información tiene acepciones particulares específicas, pero en los últimos dos tercios del pasado siglo, la acepción de información y la de señal, como conceptos de los campos enumerados, alcanzó un alto desarrollo.

¹ Doctor en Medicina, Especialista de Fisiología de Segundo Grado, Investigador Titular, Profesor Consultante, Doctor en Ciencias Médicas, Académico Titular AIA, Instituto de Endocrinología y Enfermedades Metabólicas MINSAP.

² Licenciado en Informática, Instituto Superior de Medicina Militar “Dr. Luis Díaz Soto”

³ Licenciado en Cibernética-Matemática, Profesor Auxiliar, Maestro en Ciencias de la Computación Facultad de Biología, Universidad de La Habana, MES.

Desde el punto de vista fisiológico, los académicos de la antigua URSS V.M. Glushkov (1963) y A.N. Kolmogorov (1965), plantearon que el concepto de información era una característica de la organización interna de los sistemas materiales, que permite estimar las posibilidades internas de los sistemas, independientemente del proceso de transmisión o de reproducción de tal información.

Siguiendo a V.I. Dmitriev (1991), utilizaremos la definición que expresa que: *“la información siempre se manifiesta de modo material y energético en forma de señales”*. Cuando la información sea representada de modo formalizado, que permita su tratamiento por medios técnicos, se denominará con el término “datos”.

Señales

Una señal, en esencia, es un portador material de información. Las señales pueden ser naturales (originadas de manera natural), o creadas especialmente con distintos objetivos por el ser humano. La base material de las señales está constituida por mensajes, que son portadores de información. Los parámetros de variación en el tiempo de los portadores se denominarán en este trabajo como *“informativos”*.

Las señales pueden ser clasificadas como: numéricas, continuas o numérico-continuas, en dependencia de la estructura de sus parámetros informativos. Una señal será numérica, si el conjunto de valores que puede tener es finito o calculable. Será continua si el conjunto de los valores que puede tomar, respecto al parámetro considerado, conforman un conjunto continuo. Si la señal resulta numérica respecto a un parámetro, y continua respecto a otro, se la denominará numérico-continua.

Modelación matemática de señales

La modelación es un método de investigación muy útil para el estudio de las señales. En particular, la modelación matemática analítica resulta muy conveniente, al brindarle al investigador las herramientas de esa ciencia. Un elemento de cardinal importancia para estos estudios, está asociado a la teoría de las probabilidades. A pesar de que con frecuencia se emplean modelos cuyos parámetros son contradictorios respecto a las propiedades de los objetos reales, ello no ha limitado su amplia difusión y empleo. Sirva de ejemplo el modelo, en el cual se representa a una señal, como la suma de un número infinito de funciones sinusoidales con ilimitada duración.

Los parámetros de las señales en el mundo material, muestran prácticamente siempre, variaciones con respecto al tiempo. Se acostumbra denominar variaciones *“determinadas”* las que se definen con precisión en cualquier momento del tiempo, en tanto que las variaciones *“aleatorias”*, son aquellas cuyos parámetros no se pueden pronosticar. Denominamos *“ruido”* a las fluctuaciones de

los parámetros que nos dificultan la observación con fidelidad de los parámetros de interés de una señal.

Representación temporal de señales

Tanto las señales determinadas, como las aleatorias, pueden representarse en función del tiempo. Para ello, en un plano de ejes de coordenadas cartesianas se puede representar la morfología de la señal, colocando generalmente en el eje de las abscisas el tiempo y en el de las ordenadas la magnitud observada de la señal. En las señales aleatorias muchas veces resulta compleja esta representación, aunque con el uso de equipos de inscripción (osciloscopios, pantallas de vídeo, polígrafos, etc.), es sumamente sencilla la realización de estas tareas.

Representación considerando la Frecuencia

Si llamamos 'T' a la duración de observación de la señal en cuestión, hay una forma de representar con bastante exactitud el segmento de la señal como una sumatoria:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + \\ \dots + a_n \cos n\omega t + \dots + \\ \dots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \dots + \\ \dots + b_n \operatorname{sen} n\omega t$$

donde t _tiempo y $\omega = 2\pi/T$.

Estas funciones trigonométricas armónicas (seno y coseno) son sencillas, elementales y convenientes para aplicaciones que empleen procedimientos matemáticos conocidos, entre ellos, el del cálculo mediante las series de Fourier.

Representación en Series de Fourier

La transformada de Fourier está basada en el descubrimiento de que es posible tomar cualquier función periódica en el tiempo **S(t)** y subdividirla en infinitas sumas de ondas sinusoidales y cosinusoidales, con frecuencias que comiencen en cero y que se incrementen por múltiplos de una frecuencia $f_0 = 1/T$, donde **T** es el periodo de **S(t)**. El desarrollo de esa expresión se puede escribir así:

$$S(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos(2\pi i f_0 t) + b_i \operatorname{sen}(2\pi i f_0 t))$$

lo cual, en esencia, se corresponde con la anterior expresión. El cálculo de los coeficientes **a_i** y **b_i**, es precisamente la tarea de la transformada de Fourier. El coeficiente **a₀** se puede considerar como el coeficiente del coseno para la fre-

cuencia cero. No existe un correspondiente coeficiente b_0 porque el seno de “0” grados es cero.

Representación con Método de Regresión Múltiple

Otro modo de representar la secuencia de valores de la señal es considerar el caso como un problema de regresión múltiple lineal, donde la variable dependiente sería la serie temporal de valores de la señal y la independiente sería la función seno de todas las posibles frecuencias discretas. Este modelo puede ser expresado de esta manera:

$$S(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n [a_i \cos(\lambda t) + b_i \sin(\lambda t)]$$

En esta expresión, λ representa la frecuencia expresada en radianes por unidad de tiempo: $\lambda = 2\pi f$ donde π es la constante $Pi = 3.1415\dots$ y f son las posibles frecuencias discretas. Los parámetros a_i y b_i , que aparecen en este modelo, serían los coeficientes de regresión que nos indican el grado con el cual están correlacionadas ambas funciones con los datos originales de la serie temporal de la señal que se está analizando.

Procesos

Concepto

Un proceso puede ser enunciado como un conjunto de fases sucesivas de un fenómeno o de una serie de fenómenos. Las propiedades de los procesos tienen una gran importancia para los investigadores, ya que en dependencia de sus características particulares será posible utilizar unos u otros métodos para la modelación matemática de los mismos. A continuación se muestran algunos tipos de procesos y sus propiedades.

Procesos estocásticos

En la naturaleza existen muchos ejemplos de procesos estocásticos (aleatorios), entre ellos los fenómenos meteorológicos, el movimiento *browniano* de las partículas, algunas vibraciones, el ruido en los canales de telecomunicaciones y elementos electrónicos, etc.

Un proceso estocástico será aquél cuyos valores (parámetros) en cada momento son aleatorios. Cuando el fenómeno es observado en una ventana de tiempo determinada, los valores del mismo en ese período se denominan realizaciones del proceso. La ventana de tiempo es variable para el investigador, pero si el proceso es verdaderamente aleatorio, independientemente de la duración de la ventana de observación, las realizaciones del proceso serán distintas. No obstante, resulta muy importante la definición de un período razonable

(ventana) de tiempo, para el estudio de un proceso en particular. Por ejemplo, en la electroencefalografía se ha considerado que una ventana de observación de 1.5 a 2 minutos resulta adecuada, en tanto para la evaluación de la actividad unitaria neuronal suelen ser suficientes 10 segundos.

La Teoría de las Probabilidades y el empleo de procedimientos estadísticos han permitido establecer criterios para caracterizar a los procesos estocásticos. El fundamento de este enfoque yace en la experiencia de que cuando el proceso es observado un número suficiente de veces (realizaciones), algunas de sus propiedades pueden ser pronosticadas, corriendo un determinado riesgo de acertar o no, pero que puede ser precisado, gracias al empleo de métodos estadísticos.

Clasificación

Los elementos empleados fundamentalmente para clasificar los procesos estocásticos son:

- El espacio de estados.
- El parámetro tiempo.
- Las dependencias estadísticas entre las magnitudes aleatorias del proceso en distintos momentos del tiempo.

El espacio de estados está constituido por el conjunto de posibles valores de la magnitud aleatoria del proceso en el tiempo. Un proceso estocástico se denomina continuo cuando su conjunto de estados constituye un todo continuo y en el que los cambios de estado son posibles en cualquier momento del tiempo. Si los cambios de estado solo se producen en cantidades finitas o en momentos de tiempo que pueden ser numerados, se dice entonces que existe una secuencia estocástica continua. Un proceso estocástico con un conjunto finito de estados que pueden variar en momentos de tiempo arbitrarios es denominado como proceso estocástico discreto. Si los cambios de estado pueden ser solo posibles en cantidades finitas o en momentos numerables de tiempo, se habla entonces de secuencias estocásticas discretas.

Características probabilísticas

Por definición, un proceso aleatorio **A(t)** se puede describir por un sistema **N** de variables aleatorias igualmente dependientes,

$$A(t_1), \dots, A_i = A(t_i), \dots, A_N = A(t_N)$$

tomadas en distintos momentos de tiempo,

$$t_1, \dots, t_i, \dots, t_N$$

Cuando **N** crece de modo ilimitado, ese sistema es equivalente al proceso estocástico examinado **A(t)**.

Para la determinación completa y la descripción de las magnitudes casuales (aleatorias), es necesario conocer la función de distribución o la densidad de probabilidad. La densidad N-dimensional de este sistema se puede escribir así:

$$P_N (A_1, ..., A_i, ..., A_N ; t_1, ..., t_i, ..., t_N)$$

La obtención, empleando métodos experimentales, de la densidad N-dimensional de probabilidad, representa una tarea compleja o prácticamente irrealizable en muchos casos de la vida real. En la práctica, solo se requiere la obtención de densidades probabilísticas “uni” o bidimensionales. Para casos prácticos, resulta suficiente conocer las características numéricas de las variables aleatorias. De ellas, las más empleadas son: la esperanza matemática (media aritmética) y la varianza, correspondientes a las funciones instantáneas de los dos primeros órdenes (primero y segundo momentos de la función).

Ahora bien, la esperanza matemática y la varianza o dispersión no son suficientes para describir las propiedades de la función aleatoria. Para ello, se requiere añadir la función de correlación (autocorrelación en este caso). La función de autocorrelación nos permite diferenciar a dos procesos estocásticos que tengan incluso similares esperanzas matemáticas y varianzas, ya que la función de autocorrelación toma en cuenta la rapidez con la cual se producen los cambios de valores en ambos procesos, en función del tiempo. Los dos procesos pueden solo ser considerados similares, si los tres criterios arrojan idénticos valores.

Procesos estocásticos estacionarios

Aunque no se enunció anteriormente, debe advertirse que los procesos estocásticos constituyen en la práctica series de tiempo (series temporales) que han sido objeto de estudio aplicando numerosos métodos matemático-estadísticos. Ya fue señalado que un proceso aleatorio es un proceso probabilístico, cuyas ocurrencias son funciones del tiempo. Ahora bien, si un proceso estocástico resulta temporalmente homogéneo, es decir, que sus propiedades estadísticas se mantienen sin variaciones ostensibles ante cualquier traslado (desplazamiento) en la escala del tiempo, estaremos en presencia de un proceso estocástico estacionario. Estos procesos, representan desviaciones alrededor de un valor medio. Por otro lado, ni la densidad media, ni el carácter de estas oscilaciones, muestran cambios relevantes en el tiempo.

Los procesos aleatorios que no resultan homogéneos temporalmente se denominan como “no estacionarios”. El modelo matemático del proceso aleatorio no estacionario es el mejor para la descripción de la señal, pero posee poca aplicación a causa de que su estructura es muy compleja. Es esta la razón del hecho, por el cual se utiliza frecuentemente en la práctica, la suposición de que el proceso en estudio, sea al menos estacionario, en el sentido más amplio de la palabra. Debe también tenerse en cuenta, que algunos procesos no estacio-

narios, pueden realmente ser tomados como estacionarios, en ciertos periodos de tiempo.

En el proceso aleatorio estacionario, en un sentido estricto del término, las expresiones para la densidad espectral de probabilidad, no dependen del punto de referencia del tiempo. La estabilidad del proceso presupone su existencia y su homogeneidad estadística en todo el intervalo de tiempo desde $-\infty$ a ∞ . Tales procesos no se corresponden a los observados en la vida real y muchísimo menos en Biología. No obstante, una convención muy empleada en diversos campos de la Ciencia es la de que, cuando se controlan al máximo las condiciones exteriores que pueden influir en el proceso, por un periodo de tiempo razonable, los procesos aleatorios que se desarrollan con cierta estabilidad pueden ser considerados como procesos estocásticos estacionarios.

Propiedades

Para los procesos aleatorios estacionarios debe cumplirse la condición de constancia temporal del momento de primer orden de la serie temporal analizada (esperanza matemática o media), así como del segundo momento (varianza). El otro elemento que integra la tríada para describir completamente al proceso, la función de autocorrelación, no puede depender del momento del tiempo en que se inicie su cálculo. En otras palabras, su dependencia solo estará vinculada al paso "tau" (τ) empleado para el cálculo de la función.

Como antes se sugirió, un proceso estocástico estable se puede considerar estacionario en el amplio sentido de la palabra. Cuando un proceso aleatorio no muestra una total constancia de los valores de la esperanza matemática, o la función de autocorrelación muestre cierta dependencia del momento en el tiempo a partir del cual se la calcule, pero la variación de los parámetros en el intervalo de tiempo que interesa analizar del proceso resulte despreciable, se le puede denominar a ese proceso como estocástico casi estacionario, y para su estudio pueden ser aplicados los procedimientos matemáticos y estadísticos que se emplean con toda propiedad en los procesos estacionarios, aunque los resultados deben ser tomados siempre con cierta reserva. Vale señalar en este punto, que el concepto de estabilidad del proceso, depende mucho de la experiencia del que así lo considera, y muchas veces, de la aplicación de elementos y procedimientos gráficos o estadísticos que permitan corroborarlo.

Tipos fundamentales

Vamos a reseñar a continuación, algunas series cronológicas teóricas que pueden de hecho constituir, esquemas o modelos teóricos para analizar las series temporales observadas en la vida real (empíricas).

Proceso aleatorio

Una serie cronológica, representada por la expresión:

$$\{x_t\} = \dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$$

para $t = (0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots)$, será un *proceso puramente aleatorio*, si x_t es el representante del resultado t-ésimo del muestreo de una serie de muestreos independientes. Cuando realizamos en la práctica esta serie de muestreos sucesivos independientes, tendremos:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

Lo que constituye una *realización* o *muestra* del proceso bajo consideración.

Proceso estrictamente periódico

Una serie cronológica teórica

$$\{x_t\} = \dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$$

para $t = (0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots)$, constituye un *proceso estrictamente periódico*, cuando para todo valor ' t ', x representa el valor de una función de tiempo $f(t)$, estrictamente periódica en el sentido matemático.

Proceso de periodicidades ocultas

Si para todo valor ' t ' en una serie temporal, se tiene que

$$x_t = \xi_t + \varepsilon_t$$

donde el primer sumando representa un *proceso estrictamente periódico* y el segundo es un *proceso puramente aleatorio*, se puede decir que se trata de un proceso de periodicidades ocultas; una realización del mismo estaría dada por la expresión:

$$y_t = f(t) + e_t,$$

donde $f(t)$ es la función periódica, y el segundo sumando representa al valor t-ésimo de la serie.

Proceso de promedios móviles

Una serie temporal teórica como ya la hemos representado antes,

$$\{x_t\} = \dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots,$$

constituye un proceso de promedios móviles, si para todo valor de ' t ' se tiene que:

$$\xi_t = \alpha_1 \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m},$$

donde ε_t es la representación de un *proceso puramente aleatorio* y las α_i ($t = 0, 1, 2, \dots, m$) son **m + 1** constantes. Este proceso supone la presencia de un suavizado sobre la serie temporal.

Proceso autorregresivo

Una serie cronológica teórica

$$\{x_t\} = \dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$$

para $t = (0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots)$, se considerará *un proceso autorregresivo*, si para todo valor de '**t**' se tiene,

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, \dots, x_{t-m}) + \varepsilon_t,$$

donde '**f**' es una función concreta y ε_t es un proceso puramente aleatorio. Si '**f**' es una función lineal, o sea,

$$x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \dots + \beta_m x_{t-m} + \varepsilon_t,$$

donde los coeficientes β_i (**i = 1, 2, 3, ..., m**), son '**m**' constantes, entonces estamos en presencia de un proceso lineal autorregresivo. Más adelante, al desarrollar los aspectos relacionados con el análisis de correlación, volveremos a estas cuestiones.

Procesos estocásticos estacionarios ergódicos

Concepto

Cuando una sola realización de un proceso estocástico estacionario, es capaz de brindar la información completa para describir al proceso, se dice que el proceso es, además de estacionario, ergódico. Esta condición de ergodicidad está implícita cuando, por ejemplo, se considera que un segmento de una duración determinada de un proceso fisiológico es capaz de ofrecer la información necesaria del estado funcional del sistema que es objeto de análisis, a partir de sus manifestaciones eléctricas, de composición química, fotoluminiscencia, temperatura, etc.

A pesar de lo atrayente de tales suposiciones, el investigador debe ser cauto a la hora de aplicar en toda su extensión las posibilidades que le ofrecen las mismas.

Propiedades

Cuando el proceso es ergódico, el valor de la esperanza matemática no depende del tiempo. Lo mismo ocurre con los momentos de orden superior y en particular con la varianza (segundo momento).

Con respecto a la función de autocorrelación:

- La función de autocorrelación de la función con valor de media cero y un paso "tau" (τ) de desplazamiento lo suficientemente grande, tiende a cero.
- La función de autocorrelación evaluada para el desplazamiento " $\tau = 0$ " es igual a la varianza del proceso.
- La función de autocorrelación es par, o sea, $R(\tau) = R(-\tau)$.
- El valor del coeficiente de autocorrelación en el desplazamiento cero es mayor o igual que el coeficiente para $R(\tau)$, o sea, para cualquier valor del coeficiente con cualquier desplazamiento τ .
- En tanto mayor sea la cantidad de componentes de alta frecuencia de la señal aleatoria, la función de autocorrelación decrecerá más, a medida que se produzca un incremento de τ .

Linealidad de los procesos

Se puede decir que existe una relación lineal entre una variable(s) independiente(s) y la dependiente, cuando se puede comprobar que efectivamente existe una correspondencia lineal entre ambas. Digamos, por ejemplo, cuando tengamos una relación del tipo:

$$y = ax + b$$

donde, x _ variable independiente e y _ variable dependiente.

La teoría del paso de procesos estocásticos a través de sistemas lineales ha sido muy desarrollada. En sentido estricto, para poder aplicar los métodos desarrollados y que son aplicables al estudio y análisis de los procesos estocásticos estacionarios ergódicos, es necesario asegurarse de que el sistema en estudio, y en particular la(s) variable(s) independiente(s) que se esté(n) analizando muestre(n) un comportamiento lineal respecto a la variable dependiente. Generalmente, la variable independiente será el tiempo y la dependiente: los valores observados del proceso sometido a evaluación y análisis.

Han sido desarrolladas importantes aplicaciones, para casos en que el sistema en estudio muestre elementos con un comportamiento no lineal, como lo es el del radar. Incluso en casos donde haya sido demostrada la existencia de *no linealidad*, existen métodos de "*linealización*" estadística, que constituyen una solución aproximada del problema.

La combinación de las posibilidades de la teoría clásica y del empleo de procedimientos físico-matemáticos a los procesos no lineales, constituyen una opción para el investigador, aunque debe señalarse que los resultados obtenidos mediante el empleo de estos métodos, en muchos casos, son difíciles de ser interpretados desde un punto de vista fisiológico, lo que implica limitaciones al uso práctico de los mismos.