

El periodograma como método para la estimación de la densidad espectral de potencia

Mario Estévez Báez¹

Andrés Machado García²

José M. Estévez Carrera³

Material publicado originalmente en formato html en:

librosabiertos:el_periodograma_como_metodo. InfoWiki. February 13, 2008, 12:57 GMT. Available at:

http://infomed20.sld.cu/wiki/doku.php?id=librosabiertos:el_periodograma_como_metodo&rev=1202907434. Accessed February 13, 2008.

Introducción

Los procesos aleatorios, como fue expuesto anteriormente, se utilizan con frecuencia como modelos de señales, cuando el proceso que está produciendo una señal es muy complejo para ser expresado por un modelo “razonablemente determinístico”.

Cuando la entrada a un sistema lineal invariante en el tiempo se modela como un *proceso estocástico* (aleatorio) estacionario, buena parte de las características esenciales de la señal de entrada y de la de salida, son representadas adecuadamente por el valor promedio de algunas propiedades, como son:

- La media aritmética de la muestra
- La varianza
- La función de autocorrelación “o” la densidad espectral de potencia

Cuando utilizamos una señal discreta (con tiempo determinado), para estudiar e inferir las propiedades del proceso generatriz, resulta entonces conveniente, estimar con herramientas matemáticas esas propiedades. La media aritmética de la muestra (m_x) resulta ser un estimado sin sesgos del valor de la media del proceso estocástico, ya que el valor esperado de la media aritmética de la muestra (m_x) es la verdadera media del proceso (M_x).

$$m_x = \sum_{n=0}^{L-1} X(n) \ ;$$

¹ Doctor en Medicina, Especialista de Fisiología de Segundo Grado, Investigador Titular, Profesor Consultante, Doctor en Ciencias Médicas, Académico Titular AIA, Instituto de Endocrinología y Enfermedades Metabólicas MINSAP.

² Licenciado en Cibernética-Matemática, Profesor Auxiliar, Maestro en Ciencias de la Computación Facultad de Biología, Universidad de La Habana, MES.

³ Licenciado en Informática, Instituto Superior de Medicina Militar “Dr. Luis Díaz Soto”

donde L _ total de valores en la muestra y $X(n)$ _ es la serie de valores de la muestra.

La varianza de la muestra (var_x) resulta ser un estimado asintóticamente no sesgado, ya que ha sido probado que a medida que L se acerca a ∞ , var_x se aproxima al valor de la verdadera varianza del proceso Var_x .

$$\text{var}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (x(n) - m_x)^2 ;$$

Consideremos ahora el estimado de la densidad espectral de potencia del proceso, que denominaremos como $P_{ss}(\Omega)$. Debe advertirse que el muestreo discreto de la señal que es generada por el proceso en estudio, introduce un nuevo factor, que podemos denominar convencionalmente “factor de ventana” y que modifica a los valores originales de la señal de la muestra. Llamemos a este factor de ventana $V(n)$. En estas condiciones, la transformada de Fourier de la señal muestreada sería:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} V(n) X(n) e^{-i(2\pi/T)kn} ;$$

Se puede entonces considerar como un estimado del espectro de potencia⁴ la cantidad

$$P_{xx}(\Omega) = \frac{1}{LU} |X(k)|^2 ;$$

que denominaremos como “periodograma”, donde U es una constante cuyo valor es 1, si no se modifican los valores muestreados de la serie de entrada a la FFT, y que puede tomar otros valores, como será analizado más adelante. Cuando se calcula el periodograma $P_{xx}(\Omega)$ utilizando “1” como valor de la constante U , el estimado recibe el nombre genérico de “periodograma”. Si se utiliza otro valor, se le denomina “periodograma modificado”.

Si una señal tiene una media aritmética diferente de cero, su espectro de potencia posee un impulso en la frecuencia cero, de la que se habló anteriormente en otro acápite. Si el valor de la media es grande, este componente va a resultar de una magnitud que dominará al estimado del espectro de potencia. Ya anteriormente también se explicó, que en estos casos, resulta conveniente substraer de los valores de la muestra la media aritmética, antes de estimar el espectro.

La media aritmética de la muestra, es realmente un estimado “*aproximado*” del componente de frecuencia cero, llamado también componente de DC por analogía de la media como un valor sobre el cual fluctúan las muestras, y ello

⁴ En lo adelante usaremos el término espectro de potencia para referirnos al más correcto de densidad espectral de potencia.

remeda en cierto sentido a los valores de corriente directa en los circuitos eléctricos.

El grado de consistencia de este estimado de $P_{ss}(\Omega)$, se ha demostrado por Jenkins y Watt (1968), que posee la misma dimensión que el espectro de potencia, a medida que es incrementado el número de muestras, ampliando el tamaño de la ventana de tiempo de la señal muestreada. En otras palabras, que la varianza del periodograma tiene aproximadamente la magnitud del espectro de potencia, lo que se puede expresar así:

$$P_{ss}(\Omega) \cong P_{xx}(\Omega) ;$$

Si prestamos atención a la expresión que más arriba se mostró:

$$P_{xx}(\Omega) = \frac{1}{LU} |X(k)|^2 ;$$

podemos advertir que los valores $X(k)$ no son más que los valores complejos de salida de la FFT para cada frecuencia discreta. El módulo elevado al cuadrado, debemos recordar, es obtenido como la suma al cuadrado del componente real con el componente imaginario elevado al cuadrado, o sea,

$$|\rho^2| = |a^2| + |b^2| ;$$

Para obtener un estimado del espectro menos “ruidoso”, existen al menos dos opciones. Una de ellas es el método del *periodograma promediado* y la otra es la de calcular el espectro a partir de la función de autocorrelación de la serie temporal de entrada a la FFT. Volveremos sobre esto en posteriores acápite.

El cálculo del periodograma constaría entonces (después de obtenidos los valores mediante la aplicación de la FFT a la serie temporal de entrada) de los siguientes pasos:

- a. Elevación al cuadrado de los valores reales e imaginarios obtenidos para cada frecuencia discreta.
- b. Suma de cada valor real obtenido mediante el paso anterior al del valor imaginario,
- c. Suma de los valores antes calculados para cada frecuencia discreta.
- d. División de la suma total de valores por el número de frecuencias discretas.

A ese valor le llamaremos estimado de la densidad espectral de potencia de la serie temporal sometida al análisis espectral. Otro valor frecuentemente también utilizado es el de la estimación de la densidad espectral de amplitudes; para calcularla basta con adicionar, entre los pasos “b” y “c” otro que diga: Extraer la raíz cuadrada del valor calculado en el paso “b”.

Las expresiones simplificadas de ambos estimados quedarían así:

$$P_{xx}(\Omega)^2 = \frac{1}{LU} |X(k)|^2 ;$$

$$P_{xx}(\Omega) = \frac{1}{LU} \sqrt[2]{|X(k)|^2} ;$$

A los efectos de la notación, hemos renombrado $P_{xx}(\Omega)^2$, colocando el exponente “2”, para representar el estimado, mediante el periodograma de la densidad espectral de potencia, dejando a $P_{xx}(\Omega)$ como símbolo de la estimación de la densidad espectral de amplitudes.

Un retorno al ejemplo expuesto en la tabla del acápite anterior, nos permite observar que los valores ubicados en las columnas novena y décima corresponden a los cálculos para obtener $P_{xx}(\Omega)^2$ y $P_{xx}(\Omega)$.

Puede verse, sin embargo, que los cálculos se han reducido a la primera mitad de la serie. Ello es posible, aprovechando el hecho de que los valores de la secuencia de entrada eran reales, con lo que los valores de salida del algoritmo de la FFT mostrarán una simetría especular, a la que antes se hizo referencia.

El único inconveniente, que podría haber sido el hecho de que los signos de los valores imaginarios son opuestos entre los valores de las dos mitades de la serie de salida, se resuelve con el hecho de que el cálculo implica la elevación al cuadrado de los valores y con ello este problema queda resuelto satisfactoriamente. A continuación vamos a detallar los pasos del cálculo refiriéndonos concretamente a una frecuencia discreta (la quinta). Los pasos para el cálculo quedan entonces así:

- a. Elevación al cuadrado de los valores reales e imaginarios obtenidos para la primera mitad de la serie (exceptuando, naturalmente, la frecuencia “0”).

$$49.94675^2 = 2,494.677836 \quad -32.57615^2 = 1,061.1205549;$$

- b. Multiplicación por 2 del valor calculado en el paso anterior, para cada frecuencia discreta de la primera mitad.

$$2 \times 2,494.677836 = 4,989.355672 \quad 2 \times 1,061.1205549 = 2,122.241108;$$

- c. Sumatoria de los valores reales e imaginarios obtenidos anteriormente para obtener el valor total relativo a cada frecuencia discreta.

$$4,989.355672 + 2.122.241108 = 7,111.59678;$$

- d. División por el número total de frecuencias discretas de la serie (“N” y no “N/2”).

$$7,111.59678 / 32 = 222.2373994;$$

Para el cálculo del estimado de la densidad espectral de amplitudes, debe insertarse entre los pasos “c” y “d”, la extracción de la raíz cuadrada de los valores y luego se continúa de la misma forma.

Una manera de representar esos resultados la constituyen los espectrogramas, que se construyen situando en el eje de las abscisas los valores de frecuencias discretas del periodograma y en las ordenadas los valores correspondientes a la potencia o a la amplitud espectral, de cada frecuencia discreta. En las próximas gráficas (Figuras 4 y 5) se muestran un espectrograma de potencia y un espectrograma de amplitudes, utilizando los datos del ejemplo de la tabla que estamos analizando. En estos diagramas se ha utilizado el procedimiento de unir entre sí los puntos que representan el valor de la potencia o de la amplitud.

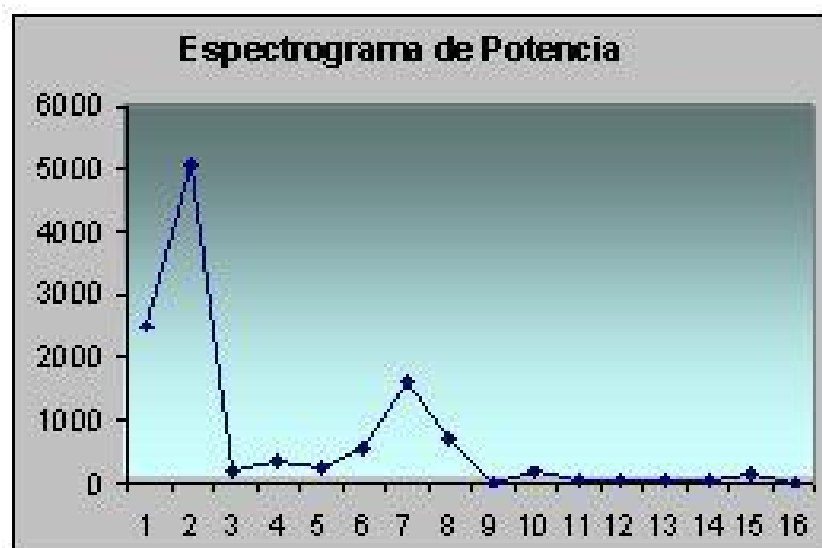


Figura 1 Espectrograma de potencia del ejemplo explicado en el texto.

Observando ambos espectrogramas se puede advertir que en el de amplitudes, existe una mejor oportunidad de analizar las frecuencias discretas más rápidas, en tanto que de igual manera, se magnifican “exageradamente” los valores que corresponden a las frecuencias discretas más bajas, en el espectrograma de potencia.

En el párrafo anterior hemos empleado los términos “rápidas” y “bajas”, refiriéndonos a las frecuencias espectrales. Para el lector resultará útil emplear la terminología que considere pertinente, o que sea más empleada por los investigadores en este campo. Nosotros, utilizaremos los términos de “altas” frecuencias para referirnos a las de la segunda mitad del espectrograma y de “bajas” frecuencias para aquellas de la primera mitad. Cuando existan bien definidos márgenes de diferenciación o nomenclatura, nos ajustaremos a lo establecido por la práctica en uso.

El problema de la dimensión de los valores de los espectrogramas merece un párrafo aparte. Si se acepta que el área bajo la curva del espectrograma de

potencia, es equivalente a la varianza (Var_x) de los valores de la secuencia temporal de entrada al cálculo de la FFT, se puede entonces considerar ese valor como la potencia media liberada por dicha “tensión” Var_x al paso de un resistor de valor 1 ohmio (Dimitriev V.I., 1991, p. 57). Esto constituye una convención útil desde el punto de vista intuitivo. Si se toman en cuenta las operaciones que se realizan en el cálculo del periodograma, se pueden expresar estas unidades de potencia asignándoles como dimensión universalmente aceptada, las que se derivan de la dimensión de los valores de entrada a la FFT, y los cálculos que con ellas se efectúan.

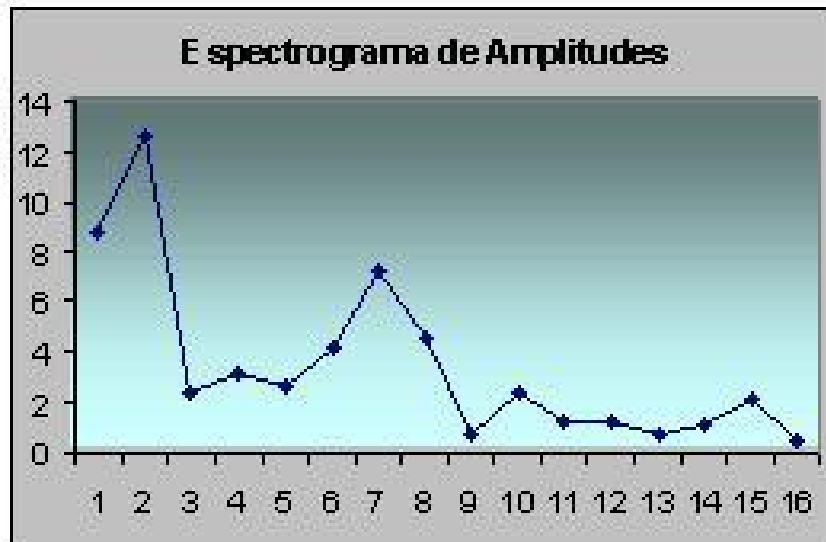


Figura 2 Espectrograma de amplitudes del ejemplo explicado en el texto.

Por ejemplo, si los valores correspondientes a la secuencia de entrada fuesen el tiempo expresado en milisegundos (ms), entonces la dimensión del espectro se puede expresar en ms^2 . Si fue de “ ms/Hz ”, puede entonces emplearse la dimensión “ ms^2/Hz ” para la potencia espectral. Siguiendo esta tónica, para el espectro de amplitudes la dimensión sería la misma que la de la señal de entrada, o sea, “ms” o “ ms/Hz ”. Se pueden mostrar también los resultados del periodograma, efectuando la transformación logarítmica de los valores de salida de la FFT. En este caso, las unidades podrían ser dadas como el logaritmo de la dimensión pertinente (por ejemplo “ $\log_{10} \text{ms}/\text{Hz}$ ”). En otros casos se puede emplear una escala en decibeles, o incluso utilizar una escala adimensional. Esta última opción es particularmente interesante y sencilla. Para ello, basta dividir los valores de entrada a la FFT por el valor de la media aritmética de la serie, o bien dividir el resultado del espectro de potencia para cada frecuencia discreta por el valor de la media de los valores de la serie de entrada, pero elevada al cuadrado (“ media^2 ”).

Resulta muy recomendable que el especialista que analiza los resultados, tenga en cuenta las dimensiones en que se ofrecen los datos, pues muchas veces le aclararán aspectos no descritos tal vez por un autor dado, en relación con los cálculos realizados y sobre todo, a los efectos de comparar resultados entre autores o métodos de procesamiento.

Fugas (“leakage”)

Volvamos a considerar un ejemplo que se expuso en un acápite anterior. Se trata de un caso en que se han tomado 500 muestras de una señal sinusoidal de frecuencia 0.08 Hz, empleando una frecuencia de discretización de 4 Hz.

Si se toman 128 muestras de esta serie y se someten al proceso de la FFT, podemos observar en la figura que más adelante aparece (Figura 9), que el espectro muestra un pico bien definido en la décima frecuencia discreta, pero también hay “picos” de mucha menor amplitud, pero perceptibles, en las frecuencias discretas comprendidas entre la octava y la duodécima. Los valores de frecuencia en el gráfico se dan en mili-hertzios (mHz).

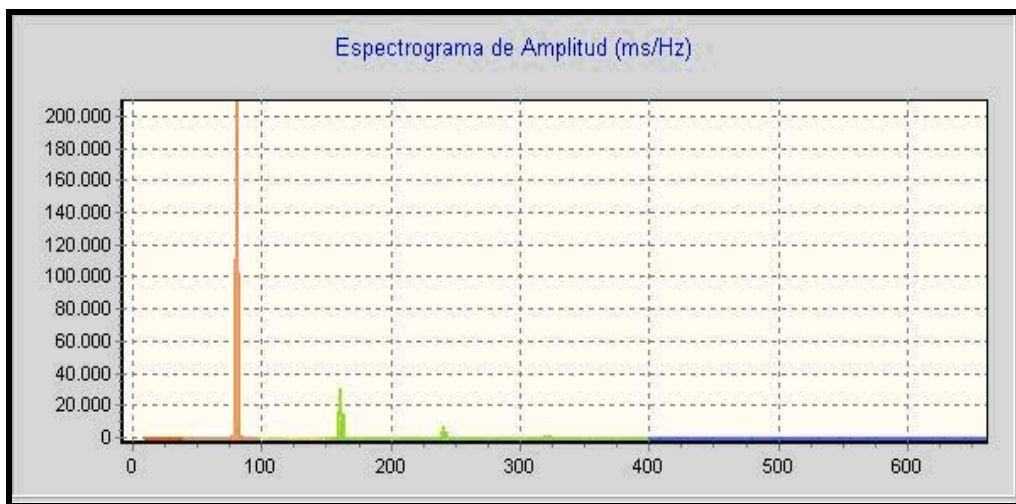


Figura 3 Espectrograma de amplitudes del ejemplo expuesto en el texto.

Pudimos haber pensado que no debía verse ningún otro pico en el espectro, pero si analizamos con detenimiento la resolución del proceso, podremos tener una idea de lo que ha sucedido. En la Tabla 3 se muestran los valores de las frecuencias discretas en la zona correspondiente del espectro.

Como se puede apreciar, el proceso no tiene una frecuencia discreta exacta de 0.08000 Hz y sin embargo, el análisis ha mostrado la existencia de densidad espectral (energía) en las frecuencias discretas más cercanas al verdadero valor de la señal de entrada. A este desplazamiento, contaminación o extensión a frecuencias discretas cercanas, se le ha denominado en lengua inglesa “leakage” y se acepta el término de “fugas” en idioma español.

También podemos observar en la Figura 6, que muestra el espectro del ejemplo anterior, que además de los picos ya mencionados se pueden apreciar otros, correspondientes a valores de las frecuencias discretas cercanos a los armónicos 2, 3, 4 etc. de la frecuencia fundamental de la señal muestreada.

Para reducir el efecto de fuga, al realizar el análisis espectral, mediante el procedimiento del periodograma, se pueden aplicar tres opciones:

- ✚ Agregar ceros a la serie temporal de entrada, con el objeto de incrementar el número de muestras. Como la resolución del proceso es dependiente del número de muestras por unidad de tiempo, lo que se busca es hacer más pequeño el valor de la resolución, buscando acercarnos a la frecuencia de interés. Esta variante recibe en inglés la denominación de “padding”.
- ✚ Transformar una proporción “p” de los datos de la serie temporal del comienzo y final de la misma, mediante la multiplicación de los valores originales observados del siguiente modo:

$$s(t) = 0.5 * \{1 - \cos[\pi * (t - 0.5) / m]\}$$

para $t=0$ hasta $m-1$

$$\text{y } s(t) = 0.5 * \{1 - \cos[\pi * (N - t + 0.5) / m]\}$$

para $t = N - m$ hasta $N - 1$,

donde “m” se escoge de modo tal que “(2 * m) / N” sea igual a la proporción de los datos que serán modificados. A este proceder se le llama en inglés “tapering” y nosotros lo llamaremos “afinamiento”.

- ✚ Suavizar los valores del periodograma a partir de la transformación de los valores de la secuencia original con una ventana de “promediación deslizante”. Este procedimiento de aplicación de ventanas de transformación a los datos de entrada a la FFT, se conoce en lengua inglesa como “data windowing” y en nuestra lengua se acepta ya el término de “ventaneo”.

Tabla 1. Valores de las frecuencias discretas del ejemplo que se detalla en el texto.

Frecuencias discretas F[i]	Valor de la F[i]
.	.
7	0.0545875
8	0.0625000
9	0.0703125
10	0.0781250
11	0.0859375
12	0.0937500
13	0.1015625
.	.

En el próximo acápite vamos a desarrollar algo más el concepto de “ventaneo” y describir algunas de las principales ventanas utilizadas.

Ventaneo (“data windowing”)

Dando por entendido que el problema del “*aliasing*” haya sido tomado en cuenta y resuelto satisfactoriamente en el momento en que se haya efectuado la discretización de la serie temporal de entrada, siempre será introducido un error que se puede denominar como “error de cuantificación”. Este error se puede modelar como una secuencia ruidosa que se adiciona a la serie temporal original $X(n)$.

Por otro lado, debido al hecho de que la entrada a la transformada de Fourier está limitada a una duración finita, ello crea una ventana temporal de valores que podemos denominar convencionalmente “ $V(n)$ ” y que se comporta como un factor de multiplicación de $X(n) * V(n)$. Este hecho produce un efecto, en el dominio de la frecuencia, que corresponde al de una convolución periódica. Esta *convolución* se puede expresar formalmente por la siguiente expresión:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} V(n) X(n) e^{i(2\pi/T)kn} ;$$

donde L es la longitud (tamaño) de la ventana y el resto de la simbología se corresponde a la utilizada anteriormente.

Retomemos la expresión que fue expuesta acerca de la estimación del espectro de potencia del proceso que se estudia, y al que intentamos conocer a través de la señal muestreada en una ventana de tiempo finito:

$$P_{xx}^2(\Omega) = \frac{1}{LU} |X(k)|^2 ;$$

Se ha comprobado que si el factor de escala ($1/(LU)$) se escoge correctamente, entonces se puede eliminar de modo significativo el efecto que introduce el factor ventana ($V(n)$) y el estimado del periodograma logrará resultar un estimado asintóticamente no sesgado del verdadero espectro de potencia que en otro lugar hemos simbolizado por $P_{ss}(\Omega)$.

El factor de escala tiene que ser ajustado escogiendo para la constante U un valor tal que:

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (V(n))^2 = 1 ;$$

Cuando esta constante U sea 1, decimos que se está aplicando una ventana de tiempo “rectangular” a la secuencia de entrada de la muestra discreta. Otras

ventanas, que trataremos más adelante en este acápite, requerirán del uso de valores para U tales que:

$$0 < U < 1 ;$$

para lograr que el estimado $P_{xx}(\Omega)^2$ sea un estimado conveniente de $P_{ss}(\Omega)$.

Esta forma de introducir intuitivamente el concepto de las ventanas, puede bastar a los efectos de esta obra, pero el lector interesado puede revisar múltiples fuentes bibliográficas, que le puedan brindar un exhaustivo conocimiento al respecto. Como breve resumen de lo expuesto hasta este punto en el acápite, digamos que la *discretización* de una señal, por lo visto, trae como consecuencias inmediatas:

- ✚ el posible efecto del fenómeno de “aliasing”,
- ✚ la influencia en la capacidad de resolver (“separar”) unas u otras frecuencias en el espectro,
- ✚ la generación del llamado efecto ventana.

Todo esto tiene que ser tomado en cuenta, para evitar distorsiones importantes de los espectros resultantes.

Ventana de Hanning

La ventana así denominada, está asociada al nombre de Julius Von Hann, meteorólogo inglés. Esta ventana es denominada en ocasiones con el nombre de ventana de Hann. El término “hanning” fue asignado por Blackman y Tukey (1958), para describir la operación de aplicación de esta ventana a una señal y ha quedado en el tiempo como el término más generalmente utilizado.

Ecuación:

$$V(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / M), & \text{para } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para cualquier otra condición} \end{cases}$$

donde “n” es el valor de cada ítem de la secuencia y “M” es el número total de ítems.

A continuación se muestra un ejemplo de la aplicación de esta ventana a una secuencia temporal de 16 ítems. En la Tabla 4 aparecen en la tercera columna los valores de los coeficientes calculados y en la cuarta está el resultado de la multiplicación de los valores de la serie por los correspondientes coeficientes.

Como puede advertirse, el último valor de la secuencia se ha considerado como el valor “M-1”. Ello es consecuencia de un convencionalismo, ya que la ventana está concebida para aplicarse a un número impar de valores (M), pero para aplicar el algoritmo de la FFT requerimos el empleo de secuencias de valores pares que sean potencias enteras de 2.

En la figura 7, que se muestra a continuación aparece la representación gráfica del uso de la ventana a los ítems de la secuencia procesada.

Tabla 2. Muestra de aplicación de la ventana de Hanning

n/o	Items	Coeffs.	Efecto
1	730	0.038060	27.7839710
2	725	0.146447	106.173792
3	735	0.308658	226.863839
4	740	0.500000	370.000000
5	715	0.691342	494.309327
6	710	0.853553	606.022907
7	725	0.961940	697.406331
8	735	1.000000	735.000000
9	740	0.961940	711.835427
10	735	0.853553	627.361742
11	730	0.691342	504.679453
12	725	0.500000	362.500000
13	720	0.308658	222.233964
14	730	0.146447	106.906025
15	735	0.038060	27.9742720
16	740	0.038060	28.1645730

Ventana de Hamming

Esta ventana tiene un efecto algo más intenso que la ventana de Hanning sobre los valores de la secuencia a los que se aplica. Al analizar la ecuación de la ventana, veremos que difiere ostensiblemente de la de Hanning y que guarda mayor similitud con la de Blackman que analizaremos posteriormente.

En la figura 8, que se muestra a continuación aparece la representación gráfica del uso de la ventana a los ítems de la secuencia procesada.

Ecuación:

$$V(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para cualquier otra condición.} \end{cases}$$

En la Tabla 5 se muestra el efecto de la ventana sobre los mismos ítems de la secuencia de 16 valores antes utilizada como ejemplo.

Tabla 3. Muestra de aplicación de la ventana de Hamming

n/o	Items	Coeffs.	Efecto
1	730	0.115015	83.961253
2	725	0.214731	155.679888
3	735	0.363966	267.514732
4	740	0.540000	399.600000
5	715	.0.716034	511.964581
6	710	.0.865269	614.341075
7	725	0.964985	699.613824
8	735	1.000000	735.000000
9	740	0.964985	714.088593
10	735	0.865269	635.972803
11	730	0.716034	522.705097
12	725	0.540000	391.500000
13	720	0.363966	262.055247
14	730	0.214731	156.753543
15	735	0.115015	84.536330
16	740	0.115015.	85.111407

Los resultados, desde el punto de vista gráfico, se muestran en la Figura 8. Debe advertirse, que al igual que para la ventana de Hanning, los coeficientes de ventana describen una curva acampanada y que el coeficiente para el valor central es 1.

Al igual que en el caso anterior, el valor del último coeficiente de ventana ha sido el mismo del valor penúltimo, por las razones que ya antes se expusieron.

Ventana de Blackman

Esta ventana tiene la particularidad de que los valores en los extremos son coeficientes con signo negativo, lo que tiene que ser tomado en cuenta por el que la emplea (Tabla 6). El efecto de la ventana se diferencia notablemente por su forma más redondeada en los valores centrales, que los que se obtienen con las ventanas de Hanning o Hamming (ver Fig 9).

Ecuación:

$$V(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en cualquier otra condición} \end{cases}$$

Tabla 4. Muestra de aplicación de la ventana de Blackman.

n/o	Items	Coeffs.	Efecto
1	730	- 0.098508	-71.911065
2	725	0.066447	48.173792
3	735	0.28522 7	209.641717
4	740	0.500000	370.000000
5	715	0.667910	477.555835
6	710	0.7735 53	549.222907
7	725	0.825371	598.394137
8	735	0.840000	617.40000
9	740	0.825371	610.774706
10	735	0.773553	568.561742
11	730	0.667910	487.574489
12	725	0.50 0000	362.500000
13	720	0.285227	205.363315
14	730	0.066447	48.506025
15	735	-0.098508	-72.403607
16	740	-0.098508	-72.896148

Ventana de Bartlett

Esta ventana se denomina con frecuencia como ventana triangular (Fig. 10), por la forma de la misma. Debe tenerse en cuenta que los coeficientes para todos los valores posibles siempre son positivos, lo que tiene importancia para aplicaciones específicas, como por ejemplo, para aplicar el algoritmo de la FFT a la secuencia de autocorrelación de la serie de entrada, para obtener el espectro de potencia suavizado.

Ecuación:

$$V(n) = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2-2n/M, & M/2 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para cualquier otra condición.} \end{cases}$$

Ventana Rectangular

Cuando no se aplica una ventana determinada a la serie temporal de entrada a la FFT, tales como las que se han expuesto anteriormente, el lector debe advertir que realmente “sí” está aplicada una ventana. Esta ventana, que no se advierte, pero que tiene un fundamento y efectos importantes, del cual hablamos a inicios de este acápite, tiene coeficiente “1” para todos los valores de la serie.

Ecuación:

$$V(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para cualquier otra condición.} \end{cases}$$

Debido al hecho de que en toda la longitud de la ventana de tiempo se mantiene uniforme el valor “1”, se ha denominado “rectangular” a esta ventana. Para otras cuestiones de interés, acerca de las ventanas, se remite al lector a la literatura especializada.

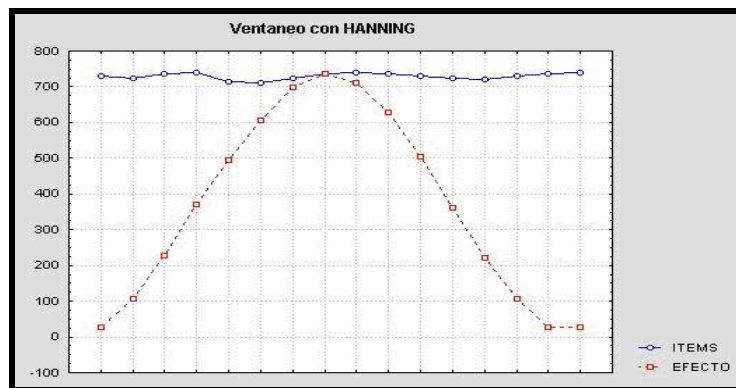


Figura 4 Diagrama de la ventana de Hanning

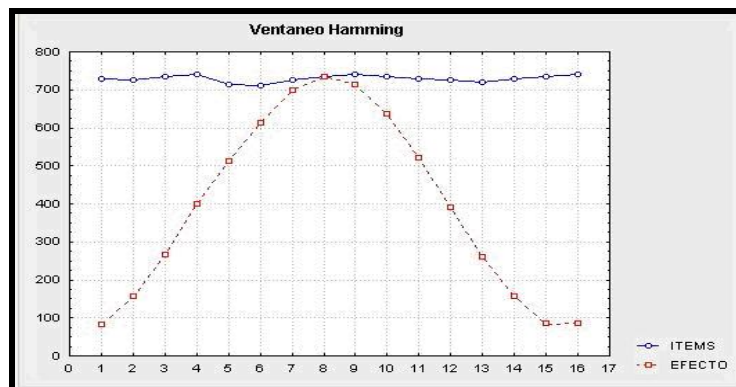


Figura 8 Diagrama de la ventana de Hamming

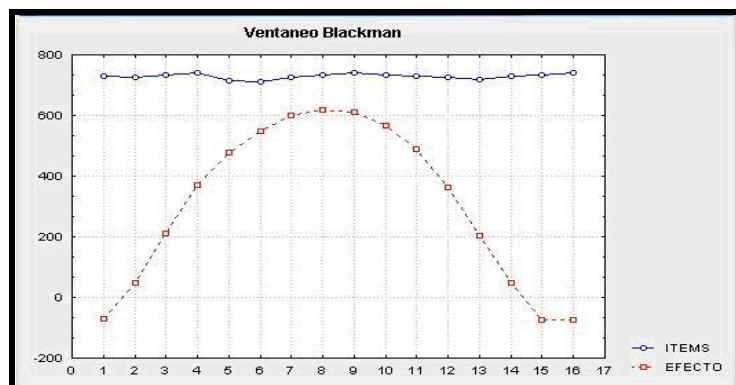


Figura 9 Diagrama de la ventana de Blackman.

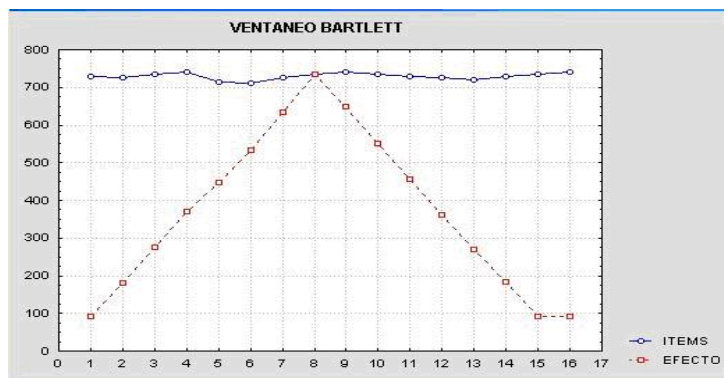


Figura 10 Diagrama de la ventana de Bartlett

Bibliografía

1. Estévez Báez M., Movsisyants S.A., Denisova V.V., Nikitina L.I. (1982) Particularidades de los procesos extralentos en algunas enfermedades del cerebro. Revista de Fisiología Humana, URSS, T.8, No. 5, pp. 851-860 (en idioma ruso).
2. Oppenheim A.V., Shafer R.W. (1989) Discrete-time signal processing. Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall.
3. Cooley J.W. and Tukey J.W. (1965) An algorithm for the machine computation of complex Fourier series. Mathematics of Computation Vol 19:297-301.
4. Merri M, Farden DC, Mottley JG, Titlebaum EL. Sampling frequency of the electrocardiogram for the spectral analysis of heart rate variability, IEEE Trans Biomed Eng 1990; 37:99–106.
5. Friesen GM, Jannett TC, Jadalloh MA, Yates SL, Quint SR, Nogle HT. A comparison of the noise sensitivity of nine QRS detection algorithms. IEEE Trans Biomed Eng 1990; 37:85–98.
6. Blackman R.B. and Tukey J.W. (1958) The measurement of power spectra. Dover Publications, New York.