

Introducción a los métodos lineales en dominio de la frecuencia

Mario Estévez Báez¹

Andrés Machado García²

José M. Estévez Carrera³

Material publicado originalmente en formato html en:

librosabiertos:introduccion_a_los_metodos_lineales_en_el_dominio_de_la_frecuencia. InfoWiki. February 7, 2008, 11:00 CST. Available at:

http://infomed20.sld.cu/wiki/doku.php?id=librosabiertos:introduccion_a_los_metodos_lineales_en_el_dominio_de_la_frecuencia&rev=1202400042. Accessed February 7, 2008.

Análisis armónico

El análisis armónico surgió y se desarrolló inicialmente como una útil herramienta para la Física y la Meteorología, ampliándose luego su utilización a otras ciencias. En esencia, el análisis armónico es aplicable principalmente a los procesos que muestren un comportamiento cíclico o periódico. En matemáticas se dice que una función de tiempo es periódica si

$$f(t) = f(t+T) ,$$

para todo valor de t , donde T _ período.

Existe un grupo de relaciones que se establecen cuando se está en presencia de un armónico simple o puro. Cuando un proceso periódico de período 'T' consta solamente de una frecuencia sin variación en el tiempo, se dice que es ese un armónico puro. El término permite comparar dos procesos que muestren periodicidad para un mismo valor de período. En este caso, se dice que ambos están en su primer armónico. Los segundos, terceros, cuartos y subsiguientes armónicos de un proceso, cuyo primer armónico sea T , corresponden a procesos

¹ Doctor en Medicina, Especialista de Fisiología de Segundo Grado, Investigador Titular, Profesor Consultante, Doctor en Ciencias Médicas, Académico Titular AIA, Instituto de Endocrinología y Enfermedades Metabólicas MINSAP.

² Licenciado en Cibernética-Matemática, Profesor Auxiliar, Maestro en Ciencias de la Computación Facultad de Biología, Universidad de La Habana, MES.

³ Licenciado en Informática, Instituto Superior de Medicina Militar "Dr. Luis Díaz Soto"

periódicos con períodos correspondientes a $1/2(T)$, $1/3(T)$, $1/4(T)$, etc. Al primer período de una serie se le denomina armónico fundamental.

La expresión

$$x_t = a \cos 2\pi t/T + b \operatorname{sen} 2\pi t/T ,$$

corresponde a la de un armónico simple y es equivalente a la expresión:

$$x_t = R \operatorname{sen} (f + 2\pi t/T) ,$$

donde f _fase y R _semiampplitud o semielongación. Hay un grupo de relaciones entre R , f , a , b y T que pueden ser observadas en las siguientes expresiones:

$$R^2 = a^2 + b^2 ; \quad \tan f = \frac{a}{b} ; \quad \frac{1}{T} = \text{Frecuencia}$$

$$a = R \operatorname{sen} f \quad \text{y} \quad b = R \cos f ;$$

Muchos fenómenos o procesos oscilatorios se pueden expresar por sumas de armónicos simples, como fue mostrado en el acápite "Representación considerando la frecuencia".

Un caso particular de estas series armónicas lo constituyen las series de Fourier, como también fue señalado anteriormente. Teniendo en cuenta que los términos y conceptos que se están empleando en este acápite, y los que siguen, guardan íntima relación con conocimientos sencillos de la física, se expondrán a continuación, a modo de recordatorio, algunos elementos acerca del movimiento armónico simple, que facilitarán la comprensión.

Movimiento armónico simple

Se define con este término, al movimiento de un punto que se mueve por una circunferencia y que se proyecta sobre un diámetro de ésta. En la próxima Figura, los puntos (P1, ... , P10), en la circunferencia que tiene su centro en el punto O, se mueven en la dirección que muestran las flechas

Al concluir una vuelta completa, la proyección del punto sobre el diámetro "AB" se habrá movido en dirección de A hacia B inicialmente y luego regresado desde B hasta A. Cada vuelta de P en la circunferencia, cuando se mueve con velocidad un informe, es un movimiento oscilatorio, o vibratorio armónico simple. El efecto sobre el diámetro "AB" recuerda el movimiento que describen las bielas de muchas máquinas.

En la circunferencia de la próxima Figura 1, colocando el diámetro "AB" perpendicularmente al de la figura anterior, considerando al punto P, que se mueve en la dirección de la flecha, se pueden precisar otros elementos. La proyección Q del punto P sobre el diámetro "AB" y el punto O, correspondiente al centro de la circunferencia, conforman el triángulo OPQ. El lado OP (hipotenusa), que llamaremos 'r' corresponde al radio de la circunferencia.

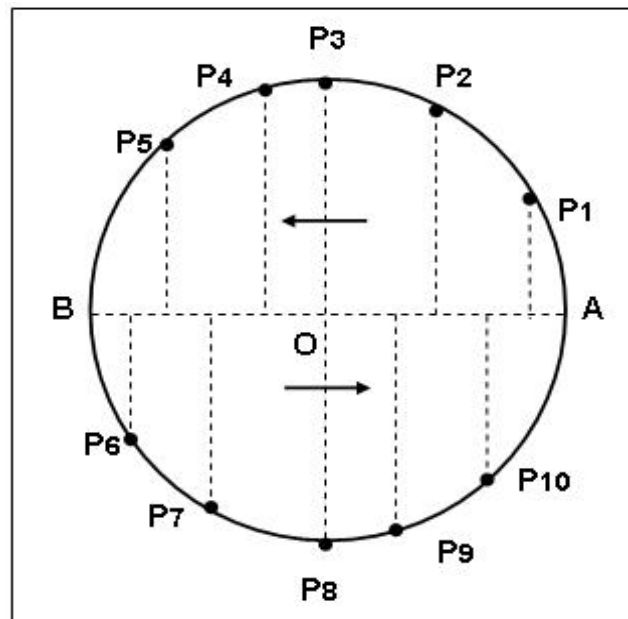


Figura 1 Diagrama descriptivo del movimiento armónico simple.

La elongación o desplazamiento de la proyección del punto P, que denominaremos x, estará dada por el lado OQ del triángulo. El ángulo α estará conformado por los radios OD y OP y por regla de ángulos alternos internos resultará que: $\alpha = \alpha'$. Tomando en cuenta lo anterior, se puede llegar a las siguientes expresiones:

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{x}{r} = \text{sen } \alpha' = \text{sen } \alpha ; \quad x = r \text{ sen } \alpha ;$$

Como se ha señalado que el punto P se mueve con movimiento circular uniforme, si su velocidad angular por unidad de tiempo, se define con la letra griega ω , el ángulo α , descrito en el tiempo 't' será:

$$\alpha = \omega t ;$$

y si se sustituye α por ωt se tiene que:

$$x = r \text{ sen } \omega t ;$$

Esta expresión constituye una forma de la ecuación del movimiento de **P**, o sea, del movimiento oscilatorio o vibratorio armónico. Sustituyendo ω por $[(2\pi/T)t]$, entonces,

$$x = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t ;$$

Ambas expresiones resultan muy importantes. La amplitud máxima o elongación es una de los elementos que describen a un movimiento armónico. Los otros son: el período y la frecuencia del movimiento, la pulsación, que se identifica como la velocidad angular del punto (ω) y la fase, que se define como el tiempo transcurrido desde el último paso del móvil por el centro de la trayectoria, moviéndose en dirección positiva (convencional). La fase se puede expresar como una fracción de período o por un ángulo (tanto grados, como en radianes).

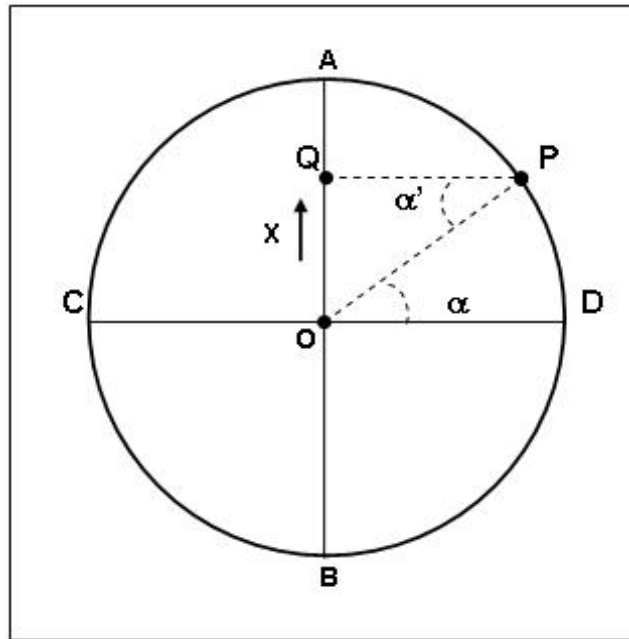


Figura 2 Extensión de algunos elementos gráficos acerca del movimiento armónico simple.

Teoría de los números complejos

Los números complejos vinieron a dar solución a múltiples problemas que las matemáticas no habían podido resolver en su momento:

- Potenciación de números negativos.
- Extracción de raíces de índice par de números negativos.
- Logaritmación de exponentes irracionales.
- Resolución de ecuaciones sin raíces reales.

Los números complejos fueron llamados imaginarios por Descartes, quien enunció un teorema, según el cual toda ecuación algébrica de grado "n" posee "n" raíces reales o imaginarias. De Moivre (1667 - 1754) estableció la fórmula acerca de la potencias de un número complejo en forma trigonométrica. Euler introdujo la costumbre de designar con la letra (i) a la unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$) y fue Gauss a quien se debe como tal la denominación de "números complejos" (M.González, 1940).

Los números imaginarios, junto a los reales, forman los números complejos. Un número complejo se puede escribir así:

$$z = (a, b) ;$$

donde a y b son los componentes del número complejo. El primer valor (a), es el componente real y el segundo (b), es el componente imaginario.

Un número real, correspondería a la siguiente expresión:

$$z = (a, 0) ;$$

donde el componente imaginario no existe, mientras que un número imaginario tendría la expresión:

$$z = (0, b) ;$$

En el caso particular, en que el número complejo es:

$$z = (0, 1) ;$$

se habla de unidad imaginaria, que Euler sugirió denominar "i" y que en muchos textos también se acostumbra denominar "j".

Módulo del número complejo

Para el número complejo $z = (a, b)$, el *módulo*, que representaremos como $|z|$, será igual a $|a, b|$ y se calculará como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} ;$$

Debe presentarse atención al hecho de que para que $|z|$ sea igual a 0, a y b tienen que ser 0.

Números complejos opuestos y conjugados

Son números complejos opuestos los siguientes:

$$(a, b) \text{ y } (-a, b) ;$$

Cuando solo los segundos componentes (imaginarios), resultan de signo diferente, se dice que los dos números complejos son conjugados:

$$(a, -b) \text{ y } (a, b) .$$

Igualdad y desigualdad

Dos números complejos (Z y Z') son iguales, cuando se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} z &= (a, b) & z' &= (a', b') \\ a &= a' & \text{y} & & b &= b' \end{aligned}$$

No se reconocen para los números complejos los conceptos de mayor o menor.

Suma y resta de números complejos

La suma de los números complejos

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$$

Es igual a otro número complejo:

$$(a_1 + a_2 + \dots, a_n, b_1 + b_2 + \dots, b_n)$$

La substracción de números complejos será:

$$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2) .$$

Multiplicación y división de números complejos

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$(a, b) / (c, d) = (a, b) * (c, -d) / (c, d) * (c, -d) =$$

$$(ac + bd, bc - ad) / c^2 + d^2 =$$

$$(ac + bd / c^2 + d^2, bc - ad - / c^2 + d^2) .$$

Potencias de exponente natural

Si

$$z = (a, b)$$

entonces,

$$z^3 = (a, b) * (a, b) * (a, b)$$

Cuando el exponente es '0' o es '1', entonces

$$Z^0 = 1 \text{ y } Z^1 = 0$$

Representación geométrica de los números complejos

Para la representación de todos los números existentes, antes de la *aparición* de los números complejos, bastaba utilizar una simple línea recta. Para el número complejo se hizo necesario el empleo de un plano de coordenadas ortogonales cartesianas. En tal plano de referencia, el número complejo $z = (a, b)$ se representa tomando como abscisa el valor real ('a') y como ordenada el valor imaginario ('b'). El punto del plano donde convergen ambas proyecciones ortogonales se denomina *afijo* del número complejo.

Un número real, tal como el (5, 0), solo tendrá representación en el eje de las abscisas, mientras que un número complejo, con solo componente imaginario (0, 3), tendrá su representación en el eje de las ordenadas. Por esta razón, se ha generalizado el uso del término "eje real" para las abscisas y de "eje imaginario" para las ordenadas.

En la figura 3 se muestra un eje de coordenadas ortogonales, que indica la manera de representar gráficamente al número complejo (a, b).

El punto 'P' corresponde al afijo y los valores a y b han sido colocados en los ejes correspondientes. Al unir el punto P (afijo) con el centro de los ejes coordenados, se delimitan dos triángulos: OPPy OPP", que resultan triángulos rectángulos y con los ángulos φ y φ semejantes, según ley de ángulos alternos internos. La hipotenusa común OP, representa a un vector con origen en O y su extremo en P.

Tomando en cuenta lo expresado, resulta sencillo representar cualquier número complejo. Ahora bien, no es ésta la única manera de representarlo, como veremos a continuación.

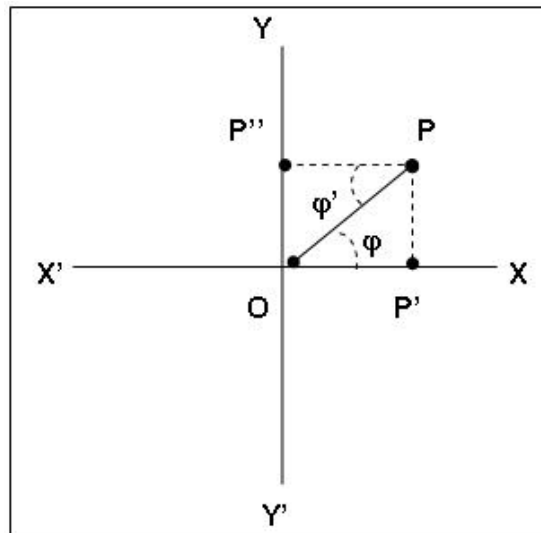


Figura 3 Diagrama para la representación de un número complejo en un plano de coordenadas cartesianas.

Representación módulo-argumental

En la figura anterior, considerando el ángulo φ como positivo, por estar en el primer cuadrante, o este mismo ángulo, aumentado o disminuido un número entero de circunferencias ($\varphi + 2k\pi$), denominaremos argumento del número complejo a dicho ángulo. Conociendo el módulo del vector (OP) o ρ , en este caso), el número complejo puede ser expresado como:

$$(a, b) = \rho \varphi ,$$

lo que recibe la denominación de *representación módulo-argumental* del número complejo. Teniendo en cuenta elementos sencillos de Trigonometría, se pueden expresar las siguientes relaciones entre a , b , ρ y φ :

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos \varphi & b &= \rho \operatorname{sen} \varphi \\ \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} & \tan \varphi &= \frac{b}{a} & \varphi &= \arctan \frac{b}{a} ; \end{aligned}$$

Representación binómica

Teniendo en cuenta que la multiplicación de un número real (n) por el número complejo (a, b) será:

$$(n, 0) * (a, b) = (n*a - 0b, nb + 0a) = (na, nb),$$

entonces, un número imaginario puro se podría expresar como:

$$(0, b) = b(0, 1) = bi$$

donde $i = (0, 1)$.

También resulta válido que

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \quad \text{y como } (a, 0) = a \quad \text{y } (0, b) = bi,$$

podemos expresar al número complejo **(a, b)** de otra manera:

$$(a, b) = a + bi,$$

lo que se conoce como la forma binómico de representación y nos indica que todo número complejo es la suma de un número real y otro imaginario puro, En la anterior expresión, *a* es la parte real y *bi* es la imaginaria.

Representación trigonométrica

Si tenemos en cuenta las expresiones que fueron mostradas en un acápite “Representación geométrica de los números complejos”, se puede establecer que:

$$a + bi = \rho \cos \varphi + \rho \operatorname{sen} \varphi i = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \text{ o sea,}$$
$$a + bi = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

que se denomina como *forma trigonométrica, polar o factorial* del número complejo. A los efectos de la Geometría Analítica, los números ρ y φ son las coordenadas polares del punto P representado en la anterior figura (Lehmann, C.H., 1968).

Extracción de raíces

Si se tiene un número complejo **(a, b)** y un número natural *n*, si existiese un número **(x, y)** tal que

$$(x, y)^n = (a, b),$$

se puede decir entonces, que **(x, y)** es la raíz *n*-ésima de **(a, b)**, o sea:

$$(x, y)^n = \sqrt[n]{(a, b)} ;$$

Todo número complejo (diferente de cero), posee “n” raíces enésimas diferentes y solamente “n”. Todas las raíces tienen el mismo módulo, que es la raíz enésima aritmética del módulo ρ y del número complejo, y sus menores argumentos son:

$$\varphi/n, \varphi+2\pi/n, \dots, \varphi+2(n-1)\pi/n ;$$

La expresión

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \sqrt[n]{\rho((\cos \varphi + 2\pi k)/n + i \operatorname{sen}(\varphi + 2\pi k)/n)} ;$$

en donde $k=0, 1, 2, \dots, n-1,$

expresa las “n” raíces de $\rho\varphi$. La raíz que corresponde a $k=0$

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi/n + i \operatorname{sen} \varphi/n)}$$

se denomina valor principal de

$$\sqrt[n]{\rho\varphi} .$$

Potencias de base real y exponente complejo

Entre las potencias de base real resultan muy importantes aquellas cuya base es el número irracional “e”, ya que todas las potencias pueden reducirse a este caso. Recordemos que el número irracional “e” se define como el resultado de:

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

En el caso de e^z , donde $z = (a, b) = x + iy$; se define

$$e^z = e^{x(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

Los números “e” y “ π ” (importantísimos en matemáticas), están ligados por las siguientes fórmulas fundamentales:

➤ Si un número complejo es igual a $i\pi$, entonces

$$e^{i\pi} = -1$$

➤ Si $z = 2ki\pi$, siendo k un número entero cualquiera, tenemos que, como

$$\cos 2k\pi = 1 \text{ y } \sin 2k\pi = 0, \text{ entonces } e^{2k\pi i} = 1 \text{ y}$$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z;$$

donde resulta conveniente volver a recordar que “ z ” es un número complejo.

Representación exponencial

Teniendo en cuenta que

$$(a + bi) = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

resulta que

$$\rho e^{i\varphi} = a + bi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

denominándose

$$\rho e^{i\varphi}$$

la representación exponencial del número complejo.